سیاه چاله ها

وحیدکریمی پورـ دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

۳ بهمن ۱۴۰۳

این درس یک معرفی کوتاه و ابتدایی و در بعضی جاها غیر دقیق از موضوع سیاهچاله هاست. هدف آن تنها برانگیختن کنجکاوی اولیه و ارائه یک صورت بندی ابتدایی است. دانشجویی که بخواهد آشنایی دقیق ترو عمیق تری با سیاهچاله ها پیدا کند، حتما باید به یک کتاب نسبیت عام مراجعه کند یا در درس نسبیت عام ثبت نام کند.

۱ مقدمه

سیاهچاله به ناحیه ای از فضا گفته می شود که در آن انحنای فضازمان یا گرانش به قدری بزرگ است که حتی نور نیز نمی تواند از آن ناحیه خارج شود. به چنین ناحیه ای یک سیاهچاله گفته می شود. در نظریه نسبیت عام، این که یک جسم بسیار سنگین فضای اطراف خود را چنان مچاله کند که تبدیل به یک سیاهچاله شود امکان پذیر است. این امکان از همان ابتدای تدوین نظریه نسبیت تنها به عنوان یک امکان نظری و یک حل انتزاعی توجه فیزیکدانان را به خود جلب کرده، اما چندان جدی گرفته نشده بود. اما در سال ۱۹۶۷ کشف تپ اخترها یا ستاره های نوترونی نشان داد که چنین اجرام فوق العاده متراکمی واقعاً می توانند وجود داشته باشند. در این سال بود که جوسلین بل بورنل [۱] پس از مدتها رصد صبورانه آسمان توانست تپ اخترهای رادیویی [۲] را کشف کند که بعدها معلوم شد ستاره های نوترونی و باقیمانده انفجارهای ابرنواختری هستند. یک ستاره نوترونی ممکن است جرمی در حدود ۱۰ تا ۲۰ برابر جرم خورشید و شعاعی در حدود ده کیلومتر داشته باشد. چگالی چنین ستاره ای در

[۱] Jocelyn Bell Bunnel

[۲] Radio Pulsar

حدود ده تریلیون کیلوگرم بر سانتی متر مکعب است. با کشف ستاره های نوترونی موقعیت سیاهچاله ها از یک حل خیالی و انتزاعی به یک امکان واقعی اخترفیزیکی تغییریافت و از آن پس تحقیقات تجربی و نظری در باره آنها شتاب گرفت. نخستین سیاهچاله در سال ۱۹۷۱ در صورت فلکی ماکیان [۳] کشف شد و از آن موقع تا کنون به روش های گوناگون در کهکشان راه شیری و دیگر کهکشان ها سیاه چاله های بزرگ و کوچک کشف شده اند. امروزه می دانیم که تشکیل سیاهچاله مرحله نهایی در زنجیره تکاملی ستاره هایی است که جرم آنها از یک حد بحرانی بیشتر باشد. یک سیاهچاله به محض تشکیل می تواند شروع به بلعیدن اجرام اطراف خود کرده و رشد کند. امروزه شواهد قوی وجود دارد که یک سیاهچاله ابَر سنگین [۴] نیز در مرکز کهکشان راه شیری وجود دارد که جرم آن میلیون ها برابر جرم خورشید است.

۲ گرانش نیوتنی و نخستین اشاره به امکان وجود سیاه چاله

ایده سیاهچاله نخستین بار توسط جان میشل، [۵] منجم و کشیش انگلیسی در مقاله ای که به تاریخ ۲۷ نوامبر ۱۷۸۳، در مجله مطالعات فلسفی انجمن پادشاهی انگلستان منتشر شده طرح شده است. جان میشل در این مقاله این اجرام را که حتی نور نیز نمی تواند از آنها بگریزد، ستاره های تاریک [۶] می نامد. او با محاسبات مکانیک نیوتنی نشان می دهد که اگر ستاره ای با چگالی خورشید، شعاعی برابر با ۵۰۰ برابر شعاع خورشید داشته باشد، آنگاه نیروی گرانش آن چنان قوی خواهد بود که حتی نور نیز نمی تواند از نیروی گرانش آن فرار کند و چنین ستاره ای تاریک خواهد بود. این ایده بلافاصله با هیجان زیاد پذیرفته شد، اما اندکی بعد وقتی که خصلت موجی نور با آزمایش های توماس یانگ [۷] تثبیت شد، به تدریج به فراموشی سپرده شد. اما ایده سیاهچاله پس از یک و نیم قرن با ظهور نسبیت عام دوباره به دنیای علم و این بار به فرهنگ عمومی باز گشت، اما تا مدتها به عنوان یک تصور نظری باقی ماند که شاهدی تجربی برای وجود آن به دست نیامده است.

برای فهم محاسبه جان میشل، نیازی نیست تا از گرانش نیوتنی فراتر رویم. ستاره ای را در نظر بگیرید با جرم M و شعاع R. برای آنکه جسمی به جرم m را با چنان سرعتی مثل v پرتاب کنیم تا نتواند از سطح ستاره فرار کند، می بایست مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل آن برابر با صفر باشد.

[۳] Cygnus X-1
[۴] Supermassive
[۵] John Mitchel
[۶] Dark Star
[۷] Thomas Young

بنابراین می بایست داشته باشیم:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R} = 0 \tag{۱}$$

و یا

$$v = (\frac{2GM}{R})^{\frac{1}{2}}. \tag{۲}$$

اگر این سرعت را سرعت نور بگیریم، خواهیم داشت:

$$R = \frac{2GM}{c^2}. \tag{۳}$$

برای خورشید با جرم کنونی اش، یعنی $M_\odot \approx 2 \times 10^{30}\ Kg$ این شعاع برابر خواهد بود با $R \approx 3\ Km$.

شکل ۱: جان میشل، منجم و کشیش انگلیسی (۱۷۲۴ـ۱۷۹۳)

گفته می شود که جان میشل یکی از دانشمندان بزرگ بوده که نظریاتش در زمینه های مختلف بعضا یک قرن جلوتر از زمانه خود بوده است و به همین سبب هم آنطور که شایسته او بود، قدر و ارزش اش شناخته نشده است. او واضع نظریات بدیع و ارزشمندی در زمین شناسی، زلزله شناسی، نجوم، مغناطیس و گرانش بوده. ایده ستاره های دوتایی و هم چنین سیاه چاله را نخستین بار او طرح کرده است. علاوه بر این روشی برای تولید مغناطیس های مصنوعی، ایده ترازوی پیچشی که بعداً کاوندیش برای اندازه گیری نیروی گرانش زمین از آن استفاده کرده، و هم چنین شرح نسبتا دقیقی از چگونگی ایجاد زلزله همه از کارهای اوست.

۳ شواهد تجربی مشاهده سیاه چاله ها

به مدد پیشرفت های رصدی در طول چند دهه گذشته، اکنون روش های متعددی برای کشف سیاهچاله ها وجود دارد. وجود یک سیاهچاله را می توان از چرخش ستاره ها به دور یک نقطه نامرئی در آسمان دریافت:

یک ـ اگر قطر مدار ستاره را به همراه سرعت یا فرکانس چرخش آن به دور آن نقطه نامرئی بدانیم می توانیم با یک محاسبه ساده از گرانش نیوتنی جرم سیاه چاله را تخمین بزنیم.

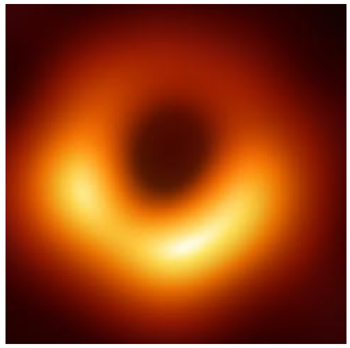
دو ـ سیاهچاله های بزرگ ممکن است ستاره هایی را که به آنها نزدیک می شوند ببلعند. در چنین مواقعی ستاره ای که به درون سیاهچاله فرو می ریزد در مدت کوتاهی درخشش بسیار زیادی را از خود نشان می دهد که ممکن است چندین برابر درخشش یک کهکشان باشد. چنین درخششی در اثر نیروهای کششی فوق العاده زیادی است که سیاهچاله به ستاره وارد می کند و آن را پاره پاره می کند و باعث ساطع شدن امواج پرشدت الکترومغناطیسی از ستاره در حال سقوط باشد. چنین پدیده ای اصطلاحاً رشته رشته شدن یا (Spagettification) می نامند. علاوه بر این ها در اطراف یک سیاهچاله معمولا یک دیسک برافزایشی [۸] نیز بوجود می آید که ناشی از ریزش و چرخش ماده ستاره ای به درون سیاهچاله است. این دیسک های برافزایشی تابش فوق العاده زیادی دارند و قابل رصد مستقیم هستند.

سه ـ هم چنین سیاهچاله ها می توانند نور ساطع شده از کهکشان های دوردستی که در پشت سر آنها قرار دارد را به نحوی خم کنند که تصویر آن کهکشان از زمین به صورت چند تصویر یکسان در زاویه های مختلف دیده شود. به چنین پدیده ای همگرایی گرانشی [۹] گفته می شود و یکی از روش های مشاهده اجرام فوق العاده متراکم در اختر فیزیک است.

چهار ـ و بالاخره از سال ۲۰۱۷ به بعد با تکامل روش های تداخل سنجی (شبیه به آزمایش اولیه مایکلسون ـ مورلی ولی با دقتی میلیون ها بار بیشتر) شاخه جدیدی در اختر فیزیک شکل گرفته که از ثبت امواج گرانشی ناشی از برخورد و ادغام سیاهچاله ها با یکدیگر یا بلعیدن ستاره های نوترونی توسط سیاهچاله ها اطلاعات فوق العاده مهمی را استخراج کند.

---

[۸] Accretion Disk
[۹] Gravitational lensing



شکل ۲: تصویری از یک ابرسیاهچاله.

شکل ۳: جوسلین بل بورنل، کاشف تپ اخترها.

در سال ۱۹۶۷ جوسلین بل بورنل دانشجوی دکتری اخترفیزیک بود که به کشف مهم اش نائل شد. این کشف ماحصل ماه ها کار و تلاش صبورانه و پی گیر او بود. گفته می شود که او در این مدت چیزی در حدود بیست کیلومتر نوارِ کاغذی از داده های رصدی خروجی از کامپیوتر را به دقت بررسی کرده بود تا بتواند نظمی را در تپ های دریافت شده از یک جرم آسمانی کشف کند. در سال ۱۹۷۴ جایزه نوبل در فیزیک مشترکاً به استاد او آنتونی هویش [آ] و همکارش مارتین رایل [ب] اعطا شد. از آن زمان تا کنون موضوع عدم اعطای جایزه به جوسلین بل، همواره محل بحث و انتقاد از کمیته جایزه نوبل بوده است. در سال ۲۰۱۸ جوسلین بل بورنل جایزه سه میلیون دلاری «جایزه بنیادی

فیزیک» [ج] را دریافت کرد. او مبلغ این جایزه را صرف تاسیس بورس تحصیلی جوسلین بل بورنل برای حمایت از دنشجویان دختر، رنگین پوست و پناهنده کرده است.

[آ] Antony Hewish
[ب] Martin Ryle
[ج] Breakthrough Prize in Fundamental Physics

۴ سیاه چاله و تکینگی آن در نسبیت عام

در چارچوب مکانیک نیوتنی هم می توان تصوری از سیاهچاله به عنوان جرمی آنقدر متراکم که حتی نور نیز نتواند از میدان گرانش آن فرار کند، داشت. این همان استدلال اولیه ای بود که بر مبنای آن نخستین بار جان میچل امکان وجود، سیاهچاله را مطرح کرده بود. اما آیا در چارچوب گرانش نسبیتی هم وجود سیاهچاله امکان پذیر است؟ در صورت وجود توصیف ریاضی و دقیق سیاهچاله چگونه است و چه تغییری در فضازمان اطراف خود پدید می آورد؟ و چگونه بر حرکت اجرام و نور در اطراف خود اثر می گذارد؟ می خواهیم در این بخش پاسخ این سوالات را دریابیم. برای این کار به متریک شوارتزچیلد که متریک یک فضازمان دارای تقارن کروی است توجه می کنیم. در مختصات (t, r, θ, ϕ) این متریک به صورت زیر است:

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r})dt^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \qquad (۴)$$

از آنجا که هیچ کدام از ضرایب به t بستگی ندارند، این متریک یک فضا زمان ایستا [۱۰] را توصیف می کند. علامت های مثبت و منفی در متریک بالا به ما می گویند که θ و ϕ مختصه های فضاگونه هستند. اما در مورد t و r وضعیت بستگی به محدوده r دارد. برای $r > 2m$ مختصه t زمان گونه و r فضاگونه است، اما برای $r < 2m$ مختصه t فضاگونه و r زمان گونه می شود. در نقطه $r = 2m$ به نظر می رسد اتفاق عجیبی می افتد چرا که در این نقطه متریک بی معنا و تکین [۱۱] می شود. هم چنین در $r = 0$ این متریک در مختصات یاد شده تکینگی پیدا می کند. اما می دانیم که مولفه های متریک می توانند با تغییر مختصات تغییر کنند و آنچه که در یک دستگاه مختصات صفر یا بی نهایت است ممکن است در مختصات دیگر مقداری متناهی یا غیرصفر پیدا کند. بنابراین برای اینکه امکان تکینگی در فضا زمان شوارتزچیلد را بررسی کنیم می بایست یک کمیت ناوردا را محاسبه کنیم. کمیت های ناوردا از ادغام تانسورها ساخته می شوند. ادغام تانسور متریک یعنی $g_{\mu\nu}$ با وارونش $g^{\mu\nu}$ بعد فضا

[۱۰] static
[۱۱] singular

زمان را بدست می دهد، ادغام متریک با تانسور ریچی $R_{\mu\nu}$ نیز مقدار صفر را بدست می دهد، زیرا اساساً معادله اینشتین در خلاء چیزی نیست جز صفر بودن تانسور ریچی. تنها کمیتی که باقی می ماند، تانسور ریمان است. با یک محاسبه طولانی از تانسور ریمان بدست می آوریم:

$$R_{\alpha\beta\gamma\nu}R^{\alpha\beta\gamma\nu} = \frac{48m^2}{r^6}, \tag{۵}$$

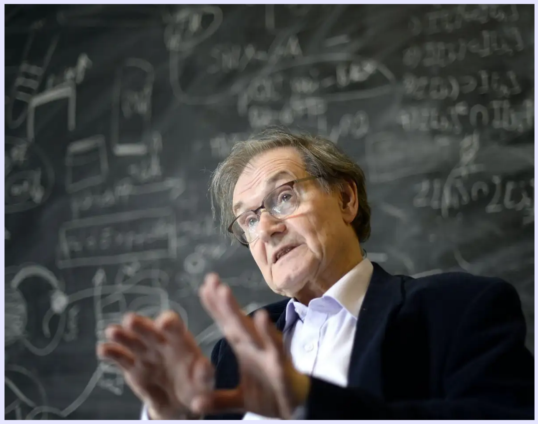
که به وضوح نشان می دهد میزان انحنای فضا زمان در نقطه $r = 0$ بی نهایت است. این تکینگی با تغییر مختصات از بین نمی رود و یک تکینگی فیزیکی است. از طرف دیگر می فهمیم که تکینگی $r = 2m$ یک تکینگی ظاهری است که تنها به خاطر انتخاب مختصات خاص پدیدار شده و با انتخاب یک مختصات دیگر براحتی رفع می شود.

۵ اجتناب ناپذیری تکینگی

مدتها پس از کشف متریک شوارتچیلد و متریک های کر [۱۲] و نیومان [۱۳] که وجود تکینگی را در فضازمان پیش بینی می کردند، باور بسیاری از جمله فیزیکدانان برجسته ای چون خالاتنیکف [۱۴] ، لیف شیتز [۱۵] و بلینسکی [۱۶] این بود که این تکینگی ها به دلیل تقارن زیادی که در شرایط مرزی و شرایط اولیه وجود دارد بوجود می آیند. به عنوان مثال در حل شوارتچیلد که مبتنی بر تقارن کروی است ، یک اختلال کوچک در شرایط مرزی و از بین رفتن تقارن کروی کافی است که نقطه تیکن را از بین ببرد. در مورد سیاهچاله های دیگر نیز به همین شکل اختلال می تواند نقاط تکین را از بین ببرد. به همین سبب کشف مهم پنروز [۱۷] و هاوکینگ [۱۸] دارای اهمیت فوق العاده در نظریه سیاهچاله هاست چرا که آنها نشان دادند پیدایش تکینگی تحت شرایط خیلی کلی نیز اجتناب ناپذیراست. در واقع آنها نشان دادند که هر نوع ناهمگنی اولیه ای در دینامیک نسبیت عام از بین می رود و سرانجام حل شوارتزچیلد پدیدار می شود که در بردارنده تکینگی است. قضایای تکینگی [۱۹] سهم مهمی در تحول نظریه نسبیت

[۱۲] Kerr
[۱۳] Neuman
[۱۴] Khalatnikov
[۱۵] Lifshitz
[۱۶] Belinsky
[۱۷] Roger Penrose
[۱۸] Steven Hawking
[۱۹] Singularity Therems

بخصوص در مورد سیاهچاله ها و انفجار اولیه در کیهانشناسی دارد.



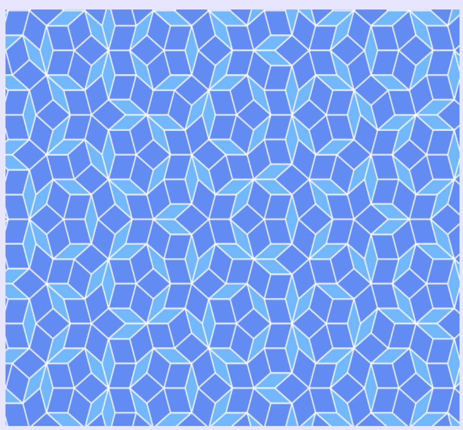
شکل ۴: راجر پنروز، ریاضیدان و فیزیکدان انگلیسی (۱۹۳۱ ـ)

وقتی که پنروز به عنوان یک دانشجو در نمایشگاهی در هلند شرکت کرده بود، با دیدن کارهای تصویری شگفت انگیز موریس اشر[۶] گرافیست هلندی، کنجکاوی اش تحریک شد که آیا او هم می تواند چنین تصویرهایی خلق کند یا نه. اولین تصویر او مثلثی است سه بعدی و جامد که همه چیزش درست به نظر می رسد غیر از این که نمی تواند واقعیت داشته باشد. شکل

شکل ۵: مثلث پنروز.

علاقه پنروز و نگاه منحصر به فردش به ریاضیات و هندسه باعث شد که انقلابی در زمینه حل های معادله اینشتین به وجود آورد. تا قبل از او هر نوع تلاشی برای حل این معادله منحصر به شرایطی بود که در آن تقارن کامل وجود داشته باشد تا امکان یک حل دقیق و بسته مثل حل شوارتزچیلد امکان پذیر باشد. این پنروز بود که با کنار نهادن جزییات هندسی و توجه به خصوصیات توپولوژیک فضا و ساختار کانفرمال آن راه گشای بسیاری از حل های جدید در نظریه نسبیت شد. با کاربرد روش های توپولوژیک بود که او نشان داد پیدایش سیاهچاله به عنوان نقطه ای تکین در فضا در مراحل پایانی عمر برخی از ستاره ها اجتناب ناپذیر است . هاوکینگ و او بعدها نشان دادند که قضیه اجتناب ناپذیری تکینگی حتی در مورد کل کیهان نیز صدق می کند.

علاقه پنروز به شکل ها و توپولوژی، نه تنها محرک سهم بزرگ او در نسبیت عام شده بلکه چند حوزه دیگر در فیزیک و ریاضیات را تحت تاثیر قرار داده. کاشی کاری پنروز [ب] یک نمونه از کشفیات (یا سرگرمی های) اوست: پوشاندن تمام صفحه دو بعدی با استفاده از فقط دو نوع کاشی (لوزی و متوازی الاضلاع)، به قسمی که تقارن انتقالی وجود نداشته باشد، اما یک تقارن دورانی پنج ضعلی در آن مشهود باشد. این کاشی کاری هم از این نظر جالب است که می توان ثابت کرد صفحه دوبعدی را نمی توان با پنج ضعلی های منتظم پوشاند و هم از آن نظر که در طبیعت شبه کریستال ها [ج] دقیقا این نوع تقارن تقریبی را نشان می دهند.

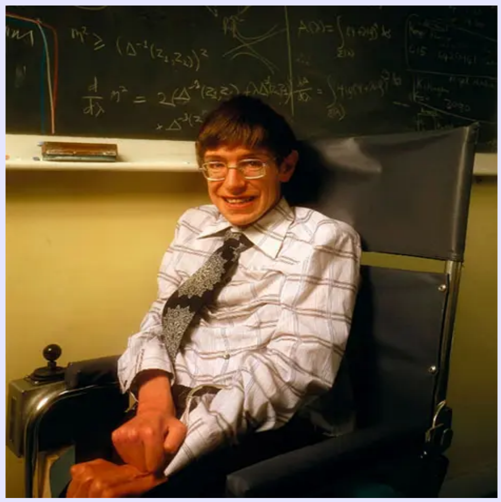


شکل ۶: کاشی کاری پنروز.

این ها البته تنها مختصری از سهم پنروز در ریاضیات و فیزیک است.

[آ] Murice Escher
[ب] Penrose Tiling
[ج] Quasi Crystals

استفن هاوکینگ به مدت سی سال از ۱۹۷۹ تا ۲۰۰۹ استاد کرسی لوکاسین در دانشگاه کمبریج بوده است. این کرسی که از سال ۱۶۶۳ تاسیس شده و زمانی توسط نیوتن و بعدها توسط دیراک اشغال شده، پر اعتبار ترین کرسی دانشگاهی جهان به شمار می رود. کارهای او شامل زمینه وسیعی در نسبیت و کیهان شناسی است، اما دو کار او اهمیت فوق العاده دارد، یکی اثبات قضایای تکینگی [7] به همراه راجر پنروز در کیهان شناسی و دیگری به خاطر تابش هاوکینگ که یکی از مهم ترین تلاش ها برای تلفیق نظریه نسبیت عام و مکانیک کوانتومی است. او هم چنین یکی از طرفداران پرشور تفسیر چندجهانی از مکانیک کوانتومی بود.



شکل ۷: استفان هاوکینگ، کیهان شناس انگلیسی (۱۹۴۲_۲۰۱۸)

[7] Singularity Theorems

۶ فضا زمان در اطراف یک سیاهچاله

برای اینکه فضا زمان اطراف یک سیاهچاله را به خوبی بفهمیم، نخست جهان خط های شعاعی نور گونه را در این فضازمان بررسی می کنیم. در واقع می خواهیم بفهمیم که نور وقتی که روی مسیر شعاعی حرکت می کند چگونه به سیاهچاله نزدیک می شود یا از آن دور می شود. سپس این سوال را برای ذرات مادی نیز خواهیم پرسید ولی فعلا خود را به نور محدود می کنیم. از آنجا که با نور سروکار داریم و مسیر نیز شعاعی است

داریم:

$$ds^2 = d\theta^2 = d\phi^2 = 0.$$

بنابراین نور روی مسیر زیر حرکت می کند:

$$0 = (1 - \frac{2m}{r})\dot{t}^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1}\dot{r}^2. \tag{۶}$$

در این جا $\dot{t}$ و $\dot{r}$ هر دو به معنای مشتق نسبت به یک پارامتر آفین مثل u هستند. از این رابطه بدست می آوریم

$$(1 - \frac{2m}{r})\dot{t} = \pm\dot{r}. \tag{۷}$$

این رابطه را می توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{dr}{dt} = \pm(1 - \frac{2m}{r}). \tag{۸}$$

نخست علامت مثبت را در نظر بگیریم: این رابطه می گوید که

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} > 0 & r > 2m \\ \frac{dr}{dt} < 0, & r < 2m. \end{cases} \tag{۹}$$

بنابراین وقتی که $r > 2m$ است، این معادله حرکت شعاع نوری را نشان می دهد که در حال دور شدن از سطح سیاهچاله است و وقتی که $r < 2m$ است، این معادله حرکت شعاع نوری را نشان می دهد که به طرف مرکز سیاهچاله سقوط می کند. این دو دسته مسیر در شکل (۶) با رنگ های قرمز نشان داده شده اند. رابطه (۸) نشان می دهد که وقتی $r \longrightarrow \infty$

$\frac{dr}{dt}$ به سمت یک میل می کند، یعنی در دوردست ها که اثر گرانش سیاهچاله کم می شود، شعاع نور با همان سرعت قابل انتظار یعنی 1 یا همان c حرکت می کند. اما در سطح بیرونی افق یعنی وقتی که $r \longrightarrow 2m^+$ سرعت دور شدن شعاع نور ، به سمت صفر میل می کند، یعنی شعاع نور به زحمت از افق رویداد جدا می شود. علاوه بر این دیده می شود که وقتی $r \longrightarrow 2m^-$ یعنی در سطح درونی سیاهچاله نیز سرعت شعاع نور به سمت صفر میل می کند، که نشان می دهد نوری که از درون افق سیاهچاله تابیده می شود، نمی تواند از افق بگریزد. این رفتار ها در شکل (۶) نیز دیده می شود.

حال علامت منفی را در نظر می گیریم که به موجب آن

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} > 0 & r < 2m \\ \frac{dr}{dt} < 0, & r > 2m. \end{cases} \tag{۱۰}$$

در این صورت اگر $r < 2m$ باشد، شعاع نور از مرکز به سطح افق سیاهچاله یعنی $r = 2m$ نزدیک می شود و البته هرگز به آن نمی رسد. هم چنین اگر $r > 2m$ باشد، شعاع نور از بیرون به سطح افق سیاهچاله نزدیک می شود ولی هرگز به آن نمی رسد. در شکل (۶) این مسیرها به رنگ آبی نشان داده شده اند. به هر چهارنوع مسیر، ژئودزی های پوچ [۲۰] گفته می شود. برای فهم دقیق این مسیرها می توانیم معادله (۸) را حل کنیم. حل این معادله ساده است. می نویسیم:

$$\pm dt = \frac{dr}{1-\frac{2m}{r}} = \frac{rdr}{r-2m} = \frac{r-2m+2m}{r-2m}dr = dr + \frac{2m}{r-2m}dr. \tag{۱۱}$$

با انتگرال گیری از دو طرف خواهیم داشت:

$$\pm t = r + 2m\ln|r-2m| + c \tag{۱۲}$$

که در آن c یک ثابت و وابسته به شرایط اولیه است. نخست جواب با علامت مثبت را نگاه می کنیم:

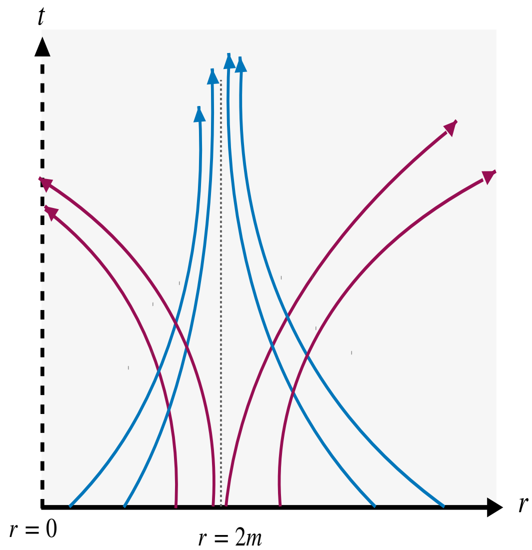
$$t = \begin{cases} r + 2m\ln(r-2m) + c & r > 2m \\ r + 2m\ln(2m-r) + c, & r < 2m. \end{cases} \tag{۱۳}$$

سپس جواب با علامت منفی را در نظر می گیریم:

$$-t = \begin{cases} r + 2m\ln(r-2m) + c & r > 2m \\ r + 2m\ln(2m-r) + c, & r < 2m. \end{cases} \tag{۱۴}$$

شکل (۶) هر چهار نوع مسیر را نشان می دهد.

[۲۰] Null Geodesic



شکل ۸: ژئودزی های پوچ (مسیر های شعاعی نور) در اطراف یک سیاهچاله .

۷ تابش هاوکینگ

نسبیت عام و مکانیک کوانتومی دو نظریه مهم قرن بیستم هستند که کار برد اولی در مقیاس های سماوی و کاربرد دومی در مقیاس های اتمی و میکروسکوپی است. سیاهچاله و اطراف نقطه تکینه آن جایی است که این دو نظریه به هم می رسند و محدوده ای است که هر دو نظریه می بایست برای توصیف آن به کار روند. ممکن است تلفیق این دو نظریه نشان دهد که واقعا نقطه تکینی در سیاهچاله وجود ندارد، یا به عبارت دقیق تر نشان دهد که رمبش یک ستاره تا رسیدن به نقطه تکین نهایی ادامه نیافته و به شکلی متوقف می شود. در حال حاضر یک نظریه گرانش کوانتومی وجود ندارد و تلاش های چند دهه گذشته برای تدوین چنین نظریه ای ناموفق بوده است. با این وجود اگر بپذیریم که هم مکانیک کوانتومی و هم نسبیت عام نظریه های صحیحی هستند، می توان با مطالعه مکانیک کوانتومی (یا در واقع نظریه میدان کوانتومی) در فضای خمیده ی اطراف یک سیاهچاله به نتایج مهمی دست یافت. این کاری بوده که استفان هاوکینگ انجام داده و نشان داده که یک سیاهچاله آنقدر ها هم که در نگاه اول به نظر می رسد تاریک ِ نیست، بلکه تابش خیلی خیلی ضعیفی از خود ساطع می کند و همین تابش است که هم به سیاهچاله دما می دهد و هم سرانجام آن را تبخیر می کند.اگر بخواهیم کشف هاوکینگ را به زبان خیلی خیلی ساده بیان کنیم، و از هر گونه ریاضیات و استدلال های دقیق

و کمّی پرهیز کنیم، خلاصه اش چنین است. خلاء کامل هرگز نمی تواند وجود داشته باشد چرا که به دلیل ذات کوانتومی میدان ها، همواره یک افت و خیز انرژی در خلاء نیز وجود دارد و همین افت و خیز باعث پدیدار شدن و نابودی گاه به گاه زوج ذراتی در زمان های فوق العاده کم می شود. اگر این افت و خیز انرژی را با ΔE نشان دهیم و طول عمر ذرات را با Δt نشان دهیم، آنگاه اصل عدم قطعیت و نظریه میدان کوانتومی چنین افت و خیزی را مجاز می شمارد مشروط بر آنکه نامساوی $\Delta E\Delta t > \hbar$ نقض نشود. به عبارت دیگر در زمان های بسیار کوتاه و به صورت تصادفی، زوج های ذره ـ پادذره در خلاء پدیدار شده و از بین می روند. هرگاه در نزدیکی افق سیاهچاله ها چنین اتفاقی بیفتد، یکی از ذرات به درون سیاهچاله سقوط کرده و برای همیشه از دسترس ما دور شده ولی ذره دیگر تبدیل به یک ذره واقعی شده و از سیاهچاله دور می شود. مثل این است که سطح افق سیاهچاله از خود ذراتی را تابش می کند. هاوکینگ نشان داد که این تابش دقیقا مثل تابش یک جسم سیاه است و دمای آن را نیز حساب کرد و نشان داد که دمای سیاهچاله از رابطه زیر تعیین می شود:

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}. \tag{۱۵}$$

در این رابطه M جرم سیاهچاله و k_B ثابت بولتزمن است. این رابطه نشان می دهد که هر چه سیاهچاله سنگین تر باشد، دمای آن به همان نسبت کوچک تر است.

■ **تمرین:** نشان دهید که دمای تابش هاوکینگ برای خورشید از مرتبه یک بیلیونیم کلوین است.

همانطور که تمرین قبلی نشان می دهد، دمای سیاهچاله ای به جرم خورشید بسیار کوچک تر از دمای تابش کیهانی است. بنابراین چنین تابشی در تابش زمینه کیهانی به کلی محو می شود و قابل اندازه گیری نیست. اما همین تابش نهایتا از انرژی و جرم یک سیاهچاله منفرد را کم می کند و در نتیجه دمای سیاهچاله بالاتر رفته و شتاب می گیرد و نهایتاً باعث تبخیر کامل سیاهچاله می شود. (این ها البته در چارچوب فیزیک کنونی است. ممکن است یک نظریه گرانش کوانتومی در صورت تدوین موفقیت آمیز، این تصویر را تغییر دهد.) هاوکینگ همچنین عمر یک سیاهچاله را نیز محاسبه کرد. برای این کار می بایست توانِ تابشی از سطح سیاهچاله را با استفاده از قانون اشتفان‌ـبولتزمن [۲۱] حساب کرد. اگر سطح افق سیاهچاله را A بگیریم، توان تابشی برابر است با:

$$P = A\sigma T^4 \tag{۱۶}$$

که در آن A سطح افق سیاهچاله و σ ثابت اشتفان‌ـبولتزمن است و به ترتیب برابرند با

$$A = 4\pi R_s^2 = 4\pi(\frac{2GM}{c^2})^2, \qquad \sigma = \frac{2}{15}\pi^5\frac{k_B^4}{c^2h^3}. \tag{۱۷}$$

[۲۱] Stephan Boltzmann

در نتیجه توان تابشی برابر است با:

$$P = (\frac{2}{15 \times (16)^3})\frac{hc^6}{\pi^2 G^2}\frac{1}{M^2} \equiv \eta M^{-2} \tag{۱۸}$$

که در آن

$$\eta = (\frac{2}{15 \times (16)^3})\frac{hc^6}{\pi^2 G^2}, \tag{۱۹}$$

یک مقدار ثابت است. حال می توانیم میزان کاهش جرم را حساب کنیم: داریم:

$$\frac{dMc^2}{dt} = -P = -\eta M^{-2}, \tag{۲۰}$$

یا

$$M^2\frac{dM}{dt} = -\frac{\eta}{c^2}. \tag{۲۱}$$

اگر جرم اولیه سیاهچاله را با M_0 و زمان تبخیر آن را با T_{ev} نشان دهیم، با حل این معادله دیفرانسیل به نتیجه زیر می رسیم:

$$0 - \frac{1}{3}M_0^3 = -\frac{\eta}{c^2}T_{ev} \tag{۲۲}$$

و یا

$$T_{ev} = \frac{c^2}{3\eta}M_0^3. \tag{۲۳}$$

با قراردادن مقدار η از رابطه (۱۹) و ساده کردن، به رابطه نهایی زیر می رسیم:

$$T_{ev} = 5120\pi\frac{G^2 M_0^3}{\hbar c^4}. \tag{۲۴}$$

۸ مسئله ها

- اگر یک ستاره مداری دایره ای به شعاع R را حول یک نقطه با سرعت زاویه ای ω طی کند، سیاه چاله ای که در آن نقطه قرار دارد، چه جرمی خواهد داشت؟

- با توجه به تابش هاوکینگ، عمر سیاهچاله ای به جرم خورشید را حساب کنید.

- تخمین بزنید که وقتی زمین در یک مسیر شعاعی به طرف خورشید سقوط کند، در چه فاصله ای از خورشید، نیروی دافعه جذر و مّدی خورشید، قادر خواهد بود بر نیروی گرانش زمین غلبه کند و زمین را به دو تکه پاره کند؟ اگر در سقوط زمین به دور خورشید چنین چیزی ممکن نیست، حساب کنید که جرم خورشید چقدر باید بزرگ تر باشد که این پدیده امکان پذیر شود. این تمرین ایده ای به شما می دهد که نیروی جذر و مدی چگونه رخ می دهد.